Lebesgue 非可測集合の存在

Theorem. $\mathbb{R}$ の部分集合で, Lebesgue 非可測なものが存在する.

Proof. $\mathbb{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbb{Q}$$

で定義し, $\mathbb{R}/\mathbb{Q} := \mathbb{R}/\sim$ で定義をする. また $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と添字集合を用いて表しておく. このとき, $\forall \lambda, \mu \in \Lambda \ (\lambda \neq \mu)$ とすると $A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset$ であるから $\mathbf{X} = \{X_\lambda : X_\lambda = [0,1] \cap A_\lambda, A_\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$ に対して選択公理を用いると, $\mathbf{X}$ の各元 X_λ から 1 つずつ元 x_λ を選び出すことができる.

$V = \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ とすると $V \subset [0,1]$ である. また V を Lebesgue 可測と仮定し, $k \in \mathbb{N}$ に対して $V_k := V + \dfrac{1}{k}$ とする. m を 1 次元 Lebesgue 測度とすると平行移動不変性より $m(V_k) = m(V)$ となる. また, $n \neq k$ のとき $V_n \cap V_k = \emptyset$ である. もし, $x \in V_n \cap V_k$ となる x があったとすると

$$x = y + \frac{1}{n} = z + \frac{1}{k}$$

とかける. よって $y - z \in \mathbb{Q}$ となるが, V の定義より $y = z$ であり $n = k$ となるからである.

$V_n \subset [0,2]$ である. また, $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$km(V) = \sum_{j=1}^{k} m(V_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^{k} V_j\right) \leq m([0,2]) = 2$$

より k は任意であるから $m(V) = 0$ となる.

また $\mathbb{Q}$ は可算集合であり, V の定義から $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (V + q)$ であるから

$$\infty = m(\mathbb{R}) = m\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (V + q)\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m(V + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m(V) = 0$$

となり矛盾となる.

以上より V は Lebesgue 非可測集合であるから $\mathbb{R}$ の部分集合で, Lebesgue 非可測なものが存在することが示された. ■